第 50 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 6
2011 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2011

弱奇性积分方程的最优阶多尺度 Petrov-Galerkin 快速算法*

程思睿[1]，詹杰民[1]，陈仲英[2]
（1. 中山大学工学院应用力学与工程系，广东 广州 510275；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：考虑求解第二类 Fredholm 弱奇性积分方程的多尺度 Petrov-Galerkin 压缩格式，给出压缩策略中截断参数的选取范围，证明了相应的压缩格式在保持稳定性、计算复杂度和系数矩阵条件数一致有界的基础上，收敛阶达到最优。并以数值算例验证了理论结果的正确性和有效性。

关键词：最优收敛阶；多尺度 Petrov-Galerkin 算法；弱奇性积分方程

中图分类号：O241.83　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529－6579（2011）06－0001－06

Fast Multiscale Petrov-Galerkin Algorithms for Weakly Singular Integral Equations

CHENG Sirui[1], *ZHAN Jiemin*[1], *CHEN Zhongying*[2]
（1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Department of Scientific Computing and Computer Applications, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: The compressed multiscale Petrov-Galerkin algorithm for solving the second kind weakly singular integral equations is considered. We give the range of the truncation parameters and prove that the corresponding compression algorithm can achieve the optimal convergent order while preserving the stability, computational complexity and the uniformly boundedness of the condition number of the coefficient matrix. The numerical results verify the validity of the theoretical analysis.

Key words: optimal convergent order; multiscale Petrov-Galerkin method; weakly_singular integral equations

积分方程的理论和应用是应用数学的一个非常重要的研究课题。近二十年来，利用多尺度和小波方法求解积分方程成为一个研究热点。许多研究集中在第二类弱奇性积分方程，提出了小波 Galerkin，Petrov-Galerkin，多尺度配置法等快速算法，参见文献［1－8］。本文以具有弱奇性核的第二类 Fredholm 积分方程为模型，采用文［8］中构造的多尺度基底，讨论求解这类方程的多尺度 Petrov-Galerkin 方法的压缩格式，给出截断参数的选择范围，使得在保持稳定性和不增加计算复杂度的基础上，得到最优收敛阶，改进了文［7］中的理论分析。

设 $E:=[0,1]$，$\mathbb{H}:=L^2(E)$。考虑实 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的第二类 Fredholm 积分方程

$$u-Ku=f,\quad f\in\mathbb{H} \tag{1}$$

其中，算子 $K:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 为带有弱奇异核的积分算子，

* 收稿日期：2011－01－04
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10801138，11061001，11071264，11001282）；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目
作者简介：程思睿（1979 年生），女，博士后；通讯作者：詹杰民；E-mail：stszjm@mail.sysu.edu.cn

其核函数 $K(t,s)$ 有以下性质：

(i) 对所有 $t,s\in[0,1],s\neq t$ 是连续的，并且存在 $0\leqslant\sigma<1$ 和 $c>0$，使得 $|K(t,s)|\leqslant\frac{c}{|t-s|^{\sigma}}$。

(ii) 对所有 $t,s\in[0,1],t\neq s$，当 $0\leqslant l\leqslant q$，$0\leqslant m\leqslant q$ 时，$K(t,s)$ 有连续偏导数 $D_t^lD_s^mK(t,s)$，而且存在正常数 c，使得当 $t\neq s$ 时，$|D_t^qD_s^qK(t,s)|\leqslant\frac{c}{|t-s|^{\sigma+2q}}$。

根据性质（i），K 是 $\mathbb{H}$ 上的紧算子（见文[9]）。当1不是 K 的特征值时，方程（1）有唯一解。

本文采用记号 $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\cdots\}$，$\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,\cdots\}$，$Z_n:=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$。同时，用 $<\cdot,\cdot>$ 和 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{H}$ 的内积及其相应的范数，用 $\|\cdot\|_m$ 表示 Sobolev 空间 $\mathrm{H}^m(E)$ 的范数。

1 多尺度 Petrov-Galerkin 格式及相关性质

设 S_m^k 表示 $[0,1]$ 上次数低于 k，相应于等距剖分 $I_{m,l}:=[\frac{l}{m},\frac{l+1}{m}],l\in\mathbb{Z}_m$ 的分片多项式空间，q,q',λ,μ 是四个正整数，且 $q'<q,q\lambda=q'\mu$。显然 $\mu>1$。对 $n\in\mathbb{N}_0$，分别令 $X_n=S_{\lambda\mu^n}^q,Y_n=S_{\mu^{n+1}}^{q'}$，则空间序列 $\{X_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ 和 $\{Y_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ 有以下性质：

(a) $\forall n\in\mathbb{N}_0,X_n\subseteq X_{n+1},Y_n\subseteq Y_{n+1}$，
$Y_n\subset X_{n+1},\dim X_n=\dim Y_n=q\lambda\mu^n$；

(b) $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}X_n}=\overline{\cup_{n=1}^{\infty}Y_n}=\mathbb{H}$

那么，根据文献［3］，对任意 $n\in\mathbb{N}_0$，$\{X_n,Y_n\}$ 构成正则对。

求解方程（1）的 Petrov-Galerkin 格式是：求 $u_n\in X_n$，使得对任意 $y_n\in Y_n$ 满足

$$<(I-K)u_n,y_n>=<f,y_n> \tag{2}$$

由空间 X_n 和 Y_n 的嵌套性质可知，它们可以有以下多尺度分解：$X_n=W_0\oplus^{\perp}\cdots\oplus^{\perp}W_n,Y_n=V_0\oplus\cdots\oplus V_n,n\in\mathbb{N}$，其中，$\oplus^{\perp}$ 表示空间的正交直和，$\oplus$ 表示空间的直和。文［8］构造了空间 X_n 和 Y_n 上的多尺度小波基底，分别记为 $\{f_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 和 $\{g_{ij}:(i,j)\in U_n\}$，其中 $U_n:=\{(i,j):j\in\mathbb{Z}_{w(i)},i\in\mathbb{Z}_{n+1}\},w(n):=\dim W_n=\dim V_n$。它们满足以下性质（具体构造及证明参看文［7-8］）。

(P1) $\{g_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 和 $\{f_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 是半双正交的，即 $<g_{ij},f_{i'j'}>=\delta_{ii'}\delta_{jj'},i\geqslant i'$。

(P2) 当 $i-1\in\mathbb{Z}_n,j\in\mathbb{Z}_{w(i)}$ 时，$f_{ij}(t)$ 和 $g_{ij}(t)$ 都具有 q 阶消失矩，即 $<f_{ij},t^r>=0$，$<g_{ij},t^r>=0,\forall r\in\mathbb{Z}_q$。

(P3) f_{ij} 和 g_{ij} 具有紧支集，即当 $j\in\mathbb{Z}_{w(0)}$ 时，$\mathrm{meas}(\mathrm{supp}f_{0j})\leqslant1,\mathrm{meas}(\mathrm{supp}g_{0j})\leqslant1$；当 $i-1\in\mathbb{Z}_n$ 时，$\mathrm{meas}(\mathrm{supp}f_{ij})\leqslant\frac{1}{\mu^{i-1}},\mathrm{meas}(\mathrm{supp}g_{ij})\leqslant\frac{1}{\mu^{i-1}}$。

为给出并分析方程（2）的算子形式，我们需要以下定义和命题（见文［4］）。

定义1 给定 $x\in\mathbb{H}$，若 $v_n\in X_n$ 对任意的 $y\in Y_n$ 满足 $<x-v_n,y_n>=0$，则称 v_n 是 X_n 到 x 关于 Y_n 的最佳逼近。若任给 $x\in\mathbb{H}$，相应的 v_n 存在唯一，则可定义线性算子 $P_n:\mathbb{H}\to X_n$ 为 $P_nx=v_n$，且 P_n 是自共轭的投影算子，称为从 $\mathbb{H}$ 到 X_n 关于 Y_n 的广义最佳逼近算子。

命题1 设空间 X_n 和 Y_n 满足条件（a）和（b），并且 $\{X_n,Y_n\}$ 构成正则对，则对任意的 $x\in\mathbb{H}$，从 X_n 到 x 关于 Y_n 的广义最佳逼近存在唯一，且有

(i) $\lim_{n\to\infty}\|P_nx-x\|=0,\forall x\in H$；

(ii) 存在常数 $p>0$，使得 $P_n\leqslant p,\forall n\in\mathbb{N}$；

(iii) 存在与 n 无关的常数 $c>0$，使得 $\|P_nx-x\|\leqslant c\|Q_nx-x\|$，其中 Q_n 是从 H 到 X_n 的正交投影算子。

利用投影算子 P_n，我们可以将（2）表示成算子形式

$$(I-K_n)u_n=P_nf \tag{3}$$

其中，$K_n:=P_nK|_{X_n}$。

方程（3）表明，Petrov-Galerkin 方法实质上是一种投影法。根据投影法的相关理论可知，存在一个自然数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，对任给的 $f\in\mathbb{H}$，方程（3）有唯一解 $u_n\in X_n$，并且存在与 n 无关的常数 $c>0$，使得 $\|u-u_n\|\leqslant c\inf_{x_n\in X_n}\|u-x_n\|$，这里 u 是方程（1）的真解。

设 $\{\xi_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 为 X_n 中与 $\{g_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 双正交的基底，可把任意的 $f\in X_n$ 和 $g\in Y_n$ 表示成 $f=\Sigma_{(i,j)\in U_n}<f,g_{ij}>\xi_{ij},g=\Sigma_{(i,j)\in U_n}<g,\xi_{ij}>g_{ij}$。

以下定理及推论给出了检验空间 Y_n 的多尺度小波基 $\{g_{ij}:(i,j)\in U_n\}$ 的稳定性，证明可参考文［7］。

定理1 存在与 n 无关的两个常数 $c_1>0,c_2>0$，使得对所有的 $f\in X_n$，有

$$c_1\|f\|\leqslant\|g_n\|_{l^2}\leqslant c_2\|f\| \tag{4}$$

其中，$g_n:=[<g_{ij},f>:(i,j)\in U_n]$。

推论1 对任意的 $n\in\mathbb{N}_0$，存在与 n 无关的两

个常数 $c_3 > 0, c_4 > 0$，使得对所有的 $g \in Y_n$ 有

$$c_3 \| g \| \leq \| \boldsymbol{h}_n \|_{l^2} \leq c_4 \| g \| \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{h}_n := [< g, \xi_{ij} > : (i,j) \in U_n]$。

2 矩阵元素估计与压缩策略

利用 X_n 的多尺度小波基 $\{f_{ij} : (i,j) \in U_n\}$，方程（3）的解 u_n 可表示为

$$u_n = \sum_{(i,j) \in U_n} c_{ij} f_{ij} \tag{6}$$

其中，$c_{ij}, (i,j) \in U_n$ 是待定的系数。将上式代入方程（3）中，可得

$$\sum_{(i,j) \in U_n} c_{ij} < g_{i'j'}, f_{ij} > - \sum_{(i,j) \in U_n} c_{ij} < g_{i'j'}, Kf_{ij} > = < g_{i'j'}, f >, (i',j') \in U_n \tag{7}$$

对 $(i,j), (i',j') \in U_n$，定义矩阵 $\boldsymbol{E}_n := [< g_{i'j'}, f_{ij} >]$，$\boldsymbol{K}_n := [< g_{i'j'}, Kf_{ij} >]$，和向量 $\boldsymbol{c}_n := [c_{ij}]$，$\boldsymbol{g}_n := [< g_{ij}, f >]$，则方程（7）可导出以下线性方程组

$$(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{K}_n) \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{g}_n \tag{8}$$

记 $K_{i'j';ij} := < g_{i'j'}, Kf_{ij} >$，$I_{ij} := \mathrm{supp} f_{ij}$，$I'_{ij} := \mathrm{supp} g_{ij}$。对核函数 $i', i \in \mathbb{Z}_{n+1}$ 作泰勒展开，并利用基底的性质，可证得以下结论（参见文［7］）。

引理 1　当 I_{ij} 和 $I'_{i'j'}$ 的距离 $\mathrm{dist}(I_{ij}, I'_{i'j'}) > 0$ 时，存在与 i,j,i',j' 无关的常数 c > 0，使得

$$| K_{i'j',ij} | \leq c \mu^{-(q+1/2) \cdot (i+i')} \mathrm{dist}(I_{ij}, I_{i'j'}^{'})^{-\sigma-2q} \tag{9}$$

由引理 1 可知，当 $\mathrm{dist}(I_{ij}, I'_{i'j'})$ 比较大时，矩阵元素 $K_{i'j',ij}$ 的数值的绝对值非常小。这使得我们可以采取压缩策略（可参考［3］）。我们将矩阵 $\boldsymbol{K}_n$ 按以下方式分块：$\boldsymbol{K}_n = [\boldsymbol{K}_{i'i}]_{i'i \in \mathbb{Z}_{n+1}}$，其中，$\boldsymbol{K}_{i'i} = [K_{i'j';ij}]_{j' \in \mathbb{Z}_{w(i')}, j \in \mathbb{Z}_{w(i)}}$。对每个块矩阵，我们给定一个截断参数 $\lambda_{i'i}$，将块矩阵 $\boldsymbol{K}_{i'i}$ 压缩而产生新的块矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{K}}_{i'i} := [\widetilde{K}_{i'j';ij}]_{j' \in \mathbb{Z}_{w(i')}, j \in \mathbb{Z}_{w(i)}}$，其中

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_{i'j';ij} := \begin{cases} K_{i'j';ij}, & \mathrm{dist}(I_{ij}, I_{i'j'}^{'}) \leq \lambda_{i'i}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

从而矩阵 $\boldsymbol{K}_n$ 被压缩为新矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{K}}_n = [\widetilde{K}_{i'i}]_{i',i \in \mathbb{Z}_{n+1}}$。用矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{K}}_n$，代替方程（8）中的矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{K}}_n$，得到一个新的线性方程组

$$(\boldsymbol{E}_n - \widetilde{\boldsymbol{K}}_n) \tilde{\boldsymbol{c}}_n = \boldsymbol{g}_n \tag{10}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{c}}_n := [\tilde{c}_{ij} : (i,j) \in U_n]$。

利用矩阵 $\boldsymbol{E}_n^{-1} \widetilde{\boldsymbol{K}}_n$，可以定义一个线性积分算子 $\widetilde{\mathbb{K}}_n : X_n \to X_n$，其核函数为

$$\widetilde{K}_n(t,s) := \sum_{(i',j') \in U_n} \sum_{(i,j) \in U_n} b_{i'j';ij} f_{i'j'}(t) f_{ij}(s)$$

其中，$b_{i'j';ij}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{E}_n^{-1} \widetilde{\boldsymbol{K}}_n$ 的元素。

求方程（2）的数值解的压缩的 Petrov-Galerkin 格式的算子形式就是求 $\tilde{u}_n = \sum_{(i,j) \in U_n} \tilde{c}_{ij} f_{ij}$ 使得

$$(I - \widetilde{K}_n) \tilde{u}_n = P_n f \tag{11}$$

3 压缩格式的理论分析

为了分析压缩格式的稳定性和收敛性，我们需要文［3］中的一个结果以及逼近论和矩阵分析中已有的两个结果。

命题 2　设 J 是包含于 $[0,1]$ 中的任意区间，s 为大于 1 的整数，则有

$$\sum_{(i,j) \in \{(i,j) : \mathrm{dist}(J, I_{ij}) > \lambda\}} \mathrm{dist}(J, I_{ij})^{-s} \leq \frac{4q\lambda(\mu - 1)}{s - 1} \lambda^{-s} \max\left\{ \frac{s-1}{\mu^{i-1}}, \lambda \right\} \tag{12}$$

引理 2　设 m 是一个整数，$0 < m \leq q$，则对任意的 $u \in \mathrm{H}^m(E)$ 以及正整数 n，存在两个与 n 无关的常数 $c_1 > 0, c_2 > 0$，使得

$$\| u - Q_n u \| \leq c_1 \mu^{-mn} \| u \|_m,$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}_{n+1}} \mu^{2mi} \sum_{j \in \mathbb{Z}_{w(i)}} | < u, f_{ij} > |^2 \leq c_2 (n+1) \| u \|_m^2$$

其中，$Q_n : L^2(E) \to X_n$ 为正交投影算子。

引理 3　对矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{i,j \in \mathbb{Z}_n}, n \in \mathbb{N}$，如果存在一组常数 $\beta_i > 0, i \in \mathbb{Z}_n$ 和一个与 n 无关的常数 $c > 0$，使得对所有的 $i,j \in \mathbb{Z}_n$，有

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_n} | a_{lj} | \beta_l \leq c \beta_j, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}_n} | a_{il} | \beta_l \leq c \beta_i$$

那么，对所有的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\| \boldsymbol{A} \|_2 \leq c$。

根据引理 1 和命题 2 以及矩阵范数的定义，可以证得由压缩策略引起的块矩阵 $\boldsymbol{K}_{i'i}$ 的扰动的估计，即以下引理。

引理 4　令 $\eta := \sigma + 2q - 1$，$\lambda_{i'i}$ 为所选取的截断参数，则存在一个与 i, i', j, j' 无关的常数 $c > 0$，使得对所有 $i', i \in \mathbb{Z}_{n+1}$，有

$$\| \boldsymbol{K}_{i'i} - \widetilde{\boldsymbol{K}}_{i'i} \|_\infty \leq c' \mu^{-(q-1/2)i-(q+1/2)i'} \cdot (\lambda_{i'i})^{-\sigma-2q} \max\left\{ \frac{\eta}{\mu^{i-1}}, \lambda_{i'i} \right\},$$

$$\| \boldsymbol{K}_{i'i} - \widetilde{\boldsymbol{K}}_{i'i} \|_1 \leq c' \mu^{-(q+1/2)i-(q-1/2)i'} \cdot (\lambda_{i'i})^{-\sigma-2q} \max\left\{ \frac{\eta}{\mu^{i-1}}, \lambda_{i'i} \right\}$$

下面我们来估计算子 K_n 和 $\widetilde{\mathrm{K}}_n$ 的差 $\mathrm{K}_n - \widetilde{\mathrm{K}}_n$。为叙述的方便，先引入一个记号。对任意的两个实数 a 和 b，令 $\mu[a,b;n] := \sum_{i \in \mathbb{Z}_{n+1}} \mu^{ai} \sum_{i' \in \mathbb{Z}_{n+1}} \mu^{bi'}$。关于实数 $\mu[a,b;n]$，有如下命题成立（见文［3］）。

命题 3　设 a,b,c 为三个实数，满足 $c > 0$ 和 $c \geq \max\{a, b, a+b\}$，则有

$$\mu[a,b;n]\mu^{-cn} = \begin{cases} o(1), & c > \max\{a,b,a+b,0\}, \\ O(n), & a=0,b=c \text{ or } a=c,b=0, \\ O(1), & \text{otherwise} \end{cases}$$

命题4 设 m 是一个整数且 $0 \leqslant m \leqslant q$，$\alpha,\beta$ 是两个实数，如果选取的截断参数 $\lambda_{i'i}$ 满足

$$\lambda_{i'i} \geqslant \max\{\mu^{-n+\alpha(n-i)+\beta(n-i')}, \frac{\eta}{\mu^{i-1}}, \frac{\eta}{\mu^{i'-1}}\} \quad (13)$$

则存在一个常数 $c>0$，使得对所有 $u \in H^m(E)$，有

$$\|(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u\| \leqslant c\mu[q+m-\alpha\eta, q-\beta\eta; n]\mu^{-(1-\sigma+m)n}\|u\|_m$$

其中，$Q_n: L^2(E) \to X_n$ 为正交投影算子。

证明 先估计 $|<(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n>|$，其中，$v_n$ 是 Y_n 中任一元素。

首先考虑 $m=0$ 的情况。令 $\theta := \mu[q-\alpha\eta, q-\beta\eta; n]$，我们定义矩阵 $\Lambda_n := [\Lambda_{i'j';ij}]_{(i',j'),(i,j)\in U_n}$，$\Lambda_{i'j';ij} = \frac{1}{\theta}\mu^{(1-\sigma)n}(K_{i'j';i,j} - \tilde{K}_{i'j';ij})$。由 Q_n 的定义，$\{\xi_{ij}\}$ 和 $\{g_{ij}\}$ 的双正交性，并利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|<(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n>| \leqslant \theta\mu^{-(1-\sigma)n}\|\Lambda_n\|_2 (\sum_{(i,j)\in U_n}|<u,f_{ij}>^2|)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{(i',j')\in U_n}|<v_n,\xi_{i'j'}>|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

下面我们来估计 $\|\Lambda_n\|_2$。根据引理4和（13）式，可得

$$\sum_{(i,j)\in U_n}|\Lambda_{i'j';ij}|\mu^{-i/2} \leqslant \frac{1}{\theta}\sum_{i\in \mathbb{Z}_{n+1}}\mu^{(1-\sigma)n}\mu^{-i/2}\|K_{i'i} - \tilde{K}_{i'i}\|_\infty \leqslant c'\mu^{-i'/2}$$

类似可证得 $\sum_{(i',j')\in U_n}|\Lambda_{i'j';ij}|\mu^{-i'/2} \leqslant c'\mu^{-i/2}$。根据引理3，即得

$$\|\Lambda_n\|_2 \leqslant c', \forall n \in \mathbb{N} \quad (15)$$

由 Bessel 不等式，有

$$\sum_{(i,j)\in U_n}|<u,f_{ij}>|^2 \leqslant \|u\|_0 \quad (16)$$

由推论1，有

$$(\sum_{(i',j')\in U_n}|<v_n,\xi_{i'j'}>|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_4\|v_n\| \quad (17)$$

将（15）、（16）和（17）式代入（14）式，可得

$$|<(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n>| \leqslant c'c_4\mu^{-(1-\sigma)n} \cdot \mu[q-\alpha\eta, q-\beta\eta; n] \cdot \|u_0\| \cdot \|v_n\| \quad (18)$$

当 $0<m\leqslant q$ 时，由引理2可知，$\|u - Q_i u\| \leqslant c_1\mu^{-mi}\|u\|_m$，$\|u - Q_{i-1}u\| \leqslant c_1\mu^{-m(i-1)}\|u\|_m$。从而有

$$\|[<u,f_{ij}>]_{j\in \mathbb{Z}_{w(i)}}\|_{l^2} = \|(u-Q_iu)-(u-Q_{i-1}u)\|_2 \leqslant c_1(1+\mu)\mu^{-mi}\|u\|_m$$

由（17）式可得

$$\|[<v_n,\zeta_{i'j'}>]_{j'\in Z_{w(i)}l^2}\| \leqslant c_4\|v_n\|$$

由矩阵分析理论可以得知，$\|K_{i'i} - \tilde{K}_{i'i}\|_2^2 \leqslant \|K_{i'i} - \tilde{K}_{i'i}\|_1 \cdot \|K_{i'i} - \tilde{K}_{i'i}\|_\infty$，结合引理4可得

$$\|K_{i'i} - \tilde{K}_{i'i}\|_2 \leqslant c'\mu^{-q(i+i')}(\lambda_{i'i})^{-\eta}$$

利用上述不等式，并结合（13）式，可得

$$|<(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n>| \leqslant c''\mu[q+m-\alpha\eta, q-\beta\eta; n] \cdot \mu^{-(1-\sigma+m)n}\|u\|_m\|v_n\| \quad (19)$$

其中，$c'' := c'c_4c_1(1+\mu)$。

令 $\tilde{c} := \max\{c'c_4, c''\}$。由（18）式和（19）式知，当 $0\leqslant m\leqslant q$ 时，对任意 $v_n \in Y_n$，

$$|<(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n>| \leqslant \tilde{c}\mu^{-(1-\sigma+m)n} \cdot \mu[q+m-\alpha\eta, q-\beta\eta; n] \cdot \|u\|_m\|v_n\| \quad (20)$$

设 P'_n 是从 $L^2(E)$ 到 Y_n 关于 X_n 的广义最佳逼近算子。由命题1知，存在一个常数 $p'>0$，使得

$$\|P'_n\| \leqslant p', \forall n \in \mathbb{N} \quad (21)$$

令 $c := p'\tilde{c}$，由广义最佳逼近的定义以及（20）和（21）可得

$$\|(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u\| = \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}}\frac{|[(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, P'_n v]|}{\|P'_n v\|} \cdot \frac{\|P'_n v\|}{\|v\|} \leqslant p' \cdot \sup_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}}\frac{|[(K_n - \tilde{K}_n)Q_n u, v_n]|}{\|v_n\|} \leqslant c\mu^{-(1-\sigma+m)n}\mu[q+m-\alpha\eta, q-\beta\eta; n] \times \|u\|_m$$

命题得证。

根据命题3，命题4，命题1，并利用算子 K 的紧性，可证得以下稳定性定理，具体证明可参考文[3，7]。

定理2 设 α,β 是两个实数，满足 $\alpha > \frac{q+\sigma-1}{\eta}$，$\beta > \frac{q+\sigma-1}{\eta}$，$\alpha+\beta>1$。如果截断参数 $\lambda_{i'i}$ 满足条（13），则存在一个 $N\in\mathbb{N}$ 和一个 $c>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，对所有的 $u_n \in X_n$，都有

$$\|(I - \tilde{K}_n)u_n\| \geqslant c\|u_n\| \quad (22)$$

以下定理给出最优收敛阶估计。

定理3 设 m 是一个整数，$0<m\leqslant q$，α,β 是两个实数，满足 $\alpha \geqslant \frac{q+m+\sigma-1}{\eta}$，$\beta \geqslant \frac{q+\sigma-1}{\eta}$，$\alpha+\beta \geqslant 1+\frac{m}{\eta}$，且 $(\alpha,\beta) \neq (\frac{q+m+\sigma-1}{\eta}, \frac{q}{\eta})$。如果截断参数 $\lambda_{i'i}$ 满足条件（13），则存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $c>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\|u - \tilde{u}_n\| \leqslant c\mu^{-mn}\|u\|_m \quad (23)$$

证明　设 Q_n 是从 $L^2(E)$ 到 X_n 的正交投影算子，则

$$\| u - \tilde{u}_n \| \leqslant \| (I - \tilde{K}_n)^{-1}(I - \tilde{K}_n)(Q_n u - \tilde{u}_n) \| + \| u - Q_n u \| \tag{24}$$

由定理2知，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 和常数 $C' > 0$，使得当 $n \geqslant N_1$ 时，有

$$\| (I - \tilde{K}_n)^{-1} \| \leqslant C' \tag{25}$$

因为 P_n 是从 $L^2(E)$ 到 X_n 关于 Y_n 的广义最佳逼近算子，由命题1知，存在 $p > 0$，使得

$$\| P_n \| \leqslant p, \forall n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

又有 $P_n(I - K)u = (I - \tilde{K}_n)\tilde{u}_n = P_n f$，从而有

$$(I - \tilde{K}_n)(Q_n u - \tilde{u}_n) = (K_n - \tilde{K}_n)Q_n u + P_n(I - K)(Q_n u - u)$$

将（14）和上式代入（13），并结合（15），可得

$$\begin{aligned}\| u - \tilde{u}_n \| &\leqslant \| u - Q_n u \| + C' \| P_n \| \cdot \| I - K \| \cdot \| u - Q_n u \| + C' \| (K_n - \tilde{K}_n) Q_n u \| \leqslant \\ &(1 + C'p \| I - K \|) \| u - Q_n u \| + C' \| (K_n - \tilde{K}_n) Q_n u \|\end{aligned} \tag{27}$$

根据引理2，存在 $c_1 > 0$，使得

$$\| u - Q_n u \| \leqslant c_1 \mu^{-mn} \| u \|_m \tag{28}$$

根据命题4，存在 $c_2 > 0$，使得

$$\| (K_n - \tilde{K}_n) Q_n \| \leqslant c_2 \mu [q + m - \alpha\eta, q - \beta\eta; n] \mu^{-(1-\sigma+m)n} \| u \|_m \tag{29}$$

将（28）和（29）代入（27），并令 $C_1 := (1 + C'p \| I - K \|) c_1$，得

$$\| u - \tilde{u}_n \| = \{ C_1 + C' c_2 \mu [q + m - \alpha\eta, q - \beta\eta; n] \cdot \mu^{-(1-\sigma)n} \} \cdot \mu^{-mn} \| u \|_m \tag{30}$$

根据命题3，当 α,β 满足定理条件时，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 和 $C'' > 0$，使得当 $n \geqslant N_2$ 时，

$$\mu [q + m - \alpha\eta, q - \beta\eta; n] \cdot \mu^{-(1-\sigma)n} \leqslant C'' \tag{31}$$

将（31）代入（30）式，并令 $N = max\{N_1, N_2\}$，$c = C_1 + C' c_2 C''$，则当 $n \geqslant N$ 时有

$$\| u - \tilde{u}_n \| \leqslant c \mu^{-mn} \| u \|_m$$

定理得证。

下面两个定理分别给出方程组（10）的系数矩阵的条件数的一致有界性和压缩格式的计算复杂度。因证明与［7］中的对应定理的证明类似，此处从略。

定理4　设实数 α,β 满足 $\alpha > \frac{q + \sigma - 1}{\eta}$，$\beta > \frac{q + \sigma - 1}{\eta}$，$\alpha + \beta > 1$。如果截断参数 $\lambda_{i'i}$ 满足条件（13），则存在 $N \in \mathbb{N}$ 和常数 $c > 0$，使得当 $n \geqslant N$ 时，

$$\| \mathbb{E}_n - \tilde{\mathbb{K}}_n \|_2 \| (\mathbb{E}_n - \tilde{\mathbb{K}}_n)^{-1} \|_2 \leqslant c \tag{32}$$

对 $i', i \in \mathbb{Z}_{n+1}$，我们记 $\tilde{\mathbb{A}}_n := \mathbb{E}_n - \tilde{\mathbb{K}}_n$，$\tilde{\mathbb{A}}_{i'i} = \mathbb{E}_{i'i} - \tilde{\mathbb{K}}_{i'i}$，$\mathbb{E}_{i'i} = [\langle g_{i'j'}, f_{ij} \rangle]_{j' \in \mathbb{Z}_{w(i')}, j \in \mathbb{Z}_{w(i)}}$。我们用 $N(\tilde{\mathbb{A}}_n)$ 表示矩阵 $\tilde{\mathbb{A}}_n$ 中非零元素的个数，以之来衡量算法的计算复杂性。

定理5　设 α,β 是两个实数。如果截断参数 $\lambda_{i'i}$ 满足条件

$$\lambda_{i'i} = \max\{\mu^{-n+\alpha(n-i)+\beta(n-i')}, \frac{\eta}{\mu^{i-1}}, \frac{\eta}{\mu^{i'-1}}\} \tag{33}$$

那么，当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 且 $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$ 时，

$$N(\tilde{\mathbb{A}}_n) = O(s(n) \log s(n)) \tag{34}$$

其中，$s(n) = \dim X_n = q\lambda\mu^n$。

因为 $q > 1$，当 $0 < m \leqslant q$ 时，$\frac{q + m + \sigma - 1}{\eta} \leqslant 1$，$0 < \frac{m}{\eta} < 1$。因此，我们总可以选取实数 α,β，使得它们满足定理2、定理3和定理4的条件，且 $\alpha,\beta \in [0,1]$，$(\alpha,\beta) \neq (1,1)$。当 $m = q$ 时，我们可以取 $\alpha = \frac{q + m + \sigma - 1}{\eta} = 1$，$\frac{m}{\eta} \leqslant \beta < 1$；当 $0 < m < q$ 时，我们可以选取 $\frac{q + m + \sigma - 1}{\eta} \leqslant \alpha < 1$，$1 + \frac{m}{\eta} - \alpha \leqslant \beta < 1$。由此可得出以下结论。

定理6　存在压缩策略，使得压缩格式的稳定性估计（22）、最优收敛阶估计（23）、条件数估计（32）和系数矩阵非零元素个数的渐近估计（34）同时成立。

4　数值算例

用前面介绍的多尺度 Petrov-Galerkin 压缩格式来求解方程

$$u(t) - (Ku)(t) = f(t), t \in E := [0,1] \tag{35}$$

其中，算子 K 定义为 $(Ku)(t) := \int_0^1 \log | \cos(\pi t) - \cos(\pi s) | u(s) ds$。显然，核函数 $K(t,s) = \log | \cos(\pi t) - \cos(\pi s) |$ 具有弱奇性，且当 $q = 2$，σ 为任意小的正数时，满足方程（1）的条件（i）和（ii）。

令 $f(t) = \sin(\pi t) - \frac{1}{\pi}[(1 + \cos(\pi t))\log(1 + \cos(\pi t))] + \frac{1}{\pi}[2 - (1 - \cos(\pi t))\log(1 - \cos(\pi t))]$，则方程（35）的真解为 $u(t) = \sin(\pi t)$。

选取 X_n 为分片线性多项式空间，即 $q=2$，选取 Y_n 为分片常数空间，即 $q'=1$。令 $\lambda=1,\mu=2$，则有 $q\lambda=q'\mu$。利用［7］中的多尺度基底的构造方法，构造出 X_0 的基底为 $f_{00}(t):=1, f_{01}(t):=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}t,\quad t\in[0,1]$。$W_0$ 的基底为

$$f_{10}(t):=\begin{cases}\frac{3\sqrt{21}}{7}-2\sqrt{21}t, t\in[0,\frac{1}{2}],\\ -\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{21}}{7}t, t\in(\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

$$f_{11}(t):=\begin{cases}-\frac{\sqrt{7}}{7}, t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{19\sqrt{7}}{7}-\frac{24\sqrt{7}}{7}t, t\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

Y_0 和 V_0 的基底分别为

$$g_{00}(t):=1,\ g_{01}(t):=\begin{cases}-\frac{2\sqrt{3}}{3}, t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}, t\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}\quad 和$$

$$g_{10}(t):=\begin{cases}\frac{11\sqrt{21}}{42}, t\in[0,\frac{1}{4}],\\ -\frac{17\sqrt{21}}{42}, t\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\\ \frac{\sqrt{21}}{42}, t\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4}],\\ \frac{5\sqrt{21}}{42}, t\in(\frac{3}{4},1],\end{cases}$$

$$g_{11}(t):=\begin{cases}-\frac{\sqrt{7}}{7}, t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{5\sqrt{7}}{7}, t\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4}],\\ -\frac{3\sqrt{7}}{7}, t\in(\frac{3}{4},1]\end{cases}$$

当 $i\geqslant 2$ 时，W_i 和 V_i 的基底可分别由 W_1 和 V_1 的基底递推得到。

采用第3节中介绍的压缩策略，根据定理5之后的分析，可选取 $\alpha=0.5,\beta=0.6$。我们采用文献［6，10］中介绍的弱奇性积分的高斯型积分方法来计算矩阵 $\mathbb{K}_n$ 中的元素，并用高斯消去法直接求解。所得数值结果见下表。其中 Conv. Rate 是收敛阶，用 $\log_2\frac{\|u-\tilde{u}_{n-1}\|_{L^2}}{\|u-\tilde{u}_n\|_{L^2}}$ 来计算，Comp. Rate 是压缩率，即矩阵 $\mathbb{K}_n$ 中非零元素个数与矩阵总元素个数之比。

表1 方程（35）的数值结果

Table 1 Numerical results for equation (35)

n	$\|u-\tilde{u}_n\|_2$	Conv. Rate	Comp. Rate
0	3.077 6e-001		
1	6.282 8e-002	2.292 3	1.000 0
2	1.611 7e-002	1.962 9	1.000 0
3	4.055 4e-003	1.990 6	0.968 8
4	1.015 9e-003	1.997 0	0.812 5
5	2.558 9e-004	1.989 2	0.595 7
6	6.511 8e-005	1.974 4	0.397 5

从上表可以看出，多尺度 Petrov-Galerkin 压缩格式确实可以达到最优收敛阶，且矩阵压缩程度随层数增加而增大，即层数越大，压缩格式节省的计算量越多。

参考文献：

［1］ DAHMEN W, PROESSDORF S, SCHNEIDER R. Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: matrix compression and fast solution［J］. Advances in Computational Mathematics, 1993, 1(3): 259-335.

［2］ MICCHELLI C A, XU Y S, ZHAO Y H. Wavelet Galerkin methods for second kind integral equations［J］. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 86 (1): 251-170.

［3］ CHEN Z Y, MICCHELLI C A, XU Y S. The Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations II: multiwavelets scheme［J］. Advances in Computational Mathematics, 1997, 7(3): 199-233.

［4］ CHEN Z Y, XU Y S. The Petrov-Galerkin and iterated Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations［J］. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(1): 406-434.

［5］ CHEN Z Y, MICCHELLI C A, XU Y S. Fast collocation methods for second kind integral equations［J］. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40 (1): 344-375.

［6］ FANG W F, WANG Y, XU Y S. An implementation of fast wavelet Galerkin methods for integral equations of the second kind［J］. Journal of Scientific Computing, 2004, 20 (2): 277-320.

［7］ 黄敏. Fredholm 第二型积分方程的小波 Petrov-Galerkin 算法［D］. 北京：中国科学院, 2003.

［8］ HUANG M. A construction of multiscale bases for Petrov-Galerkin methods for integral equations［J］. Advances in Computational Mathematics, 2006, 25(1): 7-22.

［9］ MIKHLIN S, PROSSDORF S. Singular integral operators［M］. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

［10］ KANEKO H, XU Y S. Gaussian-type quadratures for weakly singular integrals and their applications to the Fredholm integral equation of the second kind［J］. Math Comp, 1994, 62: 739-753.